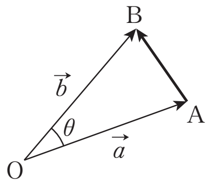
PART2 ベクトルの内積と成分

要点① 成分表示されたベクトルの内積

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を成分で表す。

点Oを定め，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta$$



また，$0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，△OAB において余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta$$

この式は $\theta=0^\circ$，180° のときも成立し

$$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2}$$

と変形することができる。

よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2}$ ……①

ここで

$$\mathrm{OA}^2=|\vec{a}|^2=(\qquad\qquad)^2=a_1{}^2+a_2{}^2,\quad \mathrm{OB}^2=|\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\qquad=(\qquad,\qquad)\ \text{より}\ \ \mathrm{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2&=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\}\\&=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-(b_1{}^2-2b_1a_1+a_1{}^2+b_2{}^2-2b_2a_2+a_2{}^2)\\&=2a_1b_1+2a_2b_2\end{aligned}$$

よって，①より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

以上より，次のことが成り立つ。

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

この式は，$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときも成り立つ。

例 $\vec{a}=(3,\ 2)$，$\vec{b}=(-2,\ 5)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\qquad\qquad\qquad\qquad=$

2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 4)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(6,\ -4)$

Point Pickup

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

第 3 講　PART2 確認問題

次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めよ。

1　$\vec{a}=(1,\ 4)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [アイ]

2　$\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(4,\ 0)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ウエ]

PART2 ベクトルの内積と成分

2 次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(0,\ 4)$

(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(6,\ -4)$

[解答]

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times0+1\times4=0+4=4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times6+3\times(-4)=12-12=0$

第3講 PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：11

[解説]

$\vec{a}=(1,\ 4)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+4\times2 \quad \text{[A]}$$
$$=3+8$$
$$=\mathbf{11}$$

[A] $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

2 **[正解]** ウエ：12

[解説]

$\vec{a}=(3,\ -2)$，$\vec{b}=(4,\ 0)$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4+(-2)\times0 \quad \text{[B]}$$
$$=12+0$$
$$=\mathbf{12}$$

[B] $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$